

Facit 6 Derivata

Du hittar förklaringar till uppgifterna i de animationer som finns under länken (rubriken) "Derivata".

1.

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9. \text{ Derivatan} = 0 \text{ ger:}$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0. \text{ Vi delar båda leden med 3 och får:}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$\text{Maximipunkten: } x = 1 \text{ ger } y = 1 - 6 + 9 + 4 = 8$$

$$\text{Minimipunkten } x = 3 \text{ ger } y = 27 - 54 + 27 + 4 = 4$$

Svar: Maximipunkten har koordinaterna (1,8)

Minimipunkten har koordinaterna (3,4)

2. En av sidorna är x cm. Då blir den andra sidan $(30 - x)$ cm. Vi kallar rektangelns area $f(x)$, och få funktionen:

$$f(x) = x(30 - x)$$

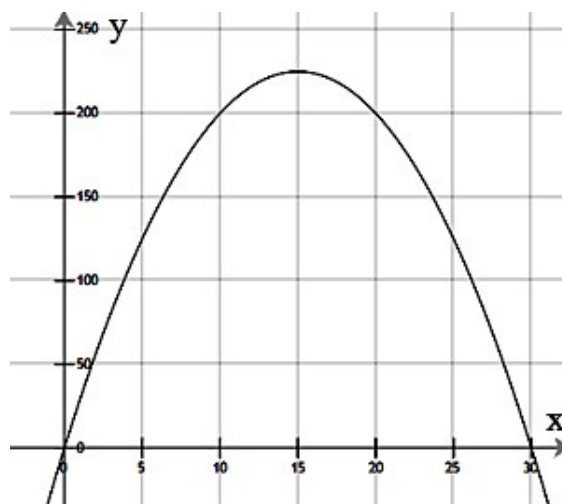
$$f(x) = -x^2 + 30x$$

$$f'(x) = -2x + 30. \text{ Derivatan} = 0 \text{ ger:}$$

$$0 = -2x + 30$$

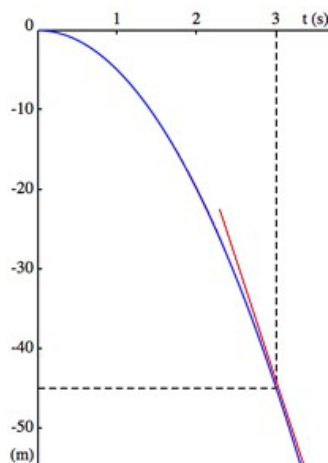
$$x = 15$$

Svar: Se grafen nedan. Då sidan x är 15 cm har arean sitt största värde, och rektangeln är då en kvadrat. Av grafen framgår att vid $x = 0$ och $x = 30$ är arean noll, vilket också stämmer om man sätter in $x = 0$ respektive $x = 30$ i funktionen $f(x) = x(30 - x)$.



3. $y = 0,4x - 0,01x^2$
 $y' = 0,4 - 0,02x$. Derivatans = 0 ger:
 $0 = 0,4 - 0,02x$
 $x = 20$
Vid $x = 20$, d v s efter 20 meter når bollbanan sin högsta punkt.
 $x = 20$ insatt i $y = 0,4x - 0,01x^2$ ger $y = 4$
Svar: Bollbanans högsta punkt är 4 m.

4. $s = \frac{g \cdot t^2}{2}$ $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ger: $s = 5 \cdot t^2$
 $s' = 10 \cdot t$ s' är fallhastigheten (m/s) t sekunder efter det att fallet startat.
 $t = 3$ ger:
 $s' = 10 \cdot 3 = 30$
Svar: Se grafen nedan. Den röda tangenten är bilden av derivatan efter 3 s.
Fallhastigheten efter 3 s är 30 m/s.
Fallsträckan efter 3 s är $\frac{10 \cdot 3^2}{2} = 45 \text{ m}$.



5. $f(t) = 400 + 8t^3$
 $f(t)$ är antalet bakterier efter t sekunder.
 $F(10) = 400 + 8 \cdot 10^3 = 8400$
 $f'(t)$, d v s derivatan är tillväxthastigheten efter t sekunder.
 $f'(t) = 24t^2$
 $t = 1$ ger $f'(1) = 24$
 $t = 5$ ger $f'(5) = 600$
 $t = 10$ ger $f'(10) = 2400$
Svar:
a) Tillväxthastigheten efter 1 sekund är 24 bakterier/s.
b) Tillväxthastigheten efter 5 sekund är 600 bakterier/s.
c) Tillväxthastigheten efter 10 sekund är 2400 bakterier/s.
d) Antalet bakterier efter 10 sekunder är 8400 bakterier.